

## Um Novo Algoritmo para Encontrar a Constituição Mais Favorável na Análise de Dados pela Envolvente

Jorge M. A. Santos  
Universidade de Évora  
[jmas@uevora.pt](mailto:jmas@uevora.pt)

### Resumo

DEA é uma técnica de programação matemática apresentada em 1978 por Charnes, Cooper e Rhodes, focado principalmente na avaliação da eficiência de organizações com finalidades não-lucrativas. Ao construir um modelo de DEA, uma decisão principal é a escolha dos “inputs” e dos “outputs” para o estudo. O modelo de DEA não é adequado para estudos com julgamentos díspares sobre a preferência dos atributos. Isto é superado pelo trabalho de Bournol e de Dula onde um modelo novo é introduzido mas com tempos de processamento muito elevados. Um algoritmo novo mais rápido é apresentado por meio de um modelo de programação linear binário misto resolvido pelo algoritmo de corte e ramificação. Os testes das vantagens computacionais desta formulação nova foram executados em dados multivariados normais gerados pelo programa “Distribution View” de J. Coelho.

**Palavras-chave:** programação binária, algoritmo de corte e ramificação, programação linear

**Title:** A new algorithm to find the most favourable constituency using data envelopment analysis

### Abstract

DEA is a mathematical programming technique presented in 1978 by Charnes, Cooper and Rhodes, which focused mainly on the efficiency assessment of not-for-profit organizations. When constructing a DEA model, a major decision is the choice of inputs and outputs for the study. The CCR DEA model is not suited for studies with constituencies with dissonant judgments about the desirability of the attributes. This problem is overcome by the work of Bournol and Dula, in which a new model is introduced but with long processing times. A faster new formulation is presented by means of a Mixed Binary Linear Programming Model. Tests concerning the computational advantages of this formulation were carried out on multivariate random normal generated by the Distribution View Software from J. Coelho.

**Keywords:** binary programming, branch and bound algorithm, linear programming

### 1-Introdução

Este artigo apresenta 5 secções. Na secção 2 o DEA é descrito tão próximo quanto possível ao artigo original de Charnes, de Cooper e de Rhodes. O principal interesse deste artigo centra-se em torno do problema dos multiplicadores, assim o seu dual, o problema da envolvente está ausente de todo o artigo. Na secção 3, o conceito de constituição é introduzido baseado no trabalho de Bournol e Dula, uma sugestão para numerar as constituições é feita, usando a sua terminologia. Na secção 4, uma formulação nova baseada em uma formulação de programação linear binária mista é descrita com algumas novas variáveis e um *big M*. Os

pesos podem assumir valores negativos ao separá-los numa componente positiva e noutra negativa. Um exemplo bi-dimensional é apresentado. Na secção 5 é descrito o processo de geração dos dados, os tempos de processamento são comparados e mostra-se que esta formulação nova é mais rápida do que a tradicional. Finalmente, na secção 6 fazem-se algumas considerações acerca das fraquezas e das vantagens deste modelo novo e futuros desenvolvimentos possíveis.

## 2-Data Envelopment Analysis

DEA é uma técnica de programação matemática apresentada em 1978 por Charnes, por Cooper e por Rhodes [Charnes e outros 1978], embora as suas raízes possam ser encontradas desde 1957 no trabalho seminal de Farrel [Farrel, 1957]. Esta técnica é introduzida geralmente como não-paramétrica, mas de facto baseia-se na suposição da linearidade e para os modelos originais, mesmo na suposição mais estrita da proporcionalidade. Sua aplicação foi focalizada principalmente na avaliação da eficiência de organizações com finalidades não-lucrativas, uma vez que estes não podem ser avaliados na base dos indicadores económicos e financeiros tradicionais usados para companhias comerciais.

Na Data Envelopment Analysis as unidades organizacionais a ser avaliadas, denominadas unidades de tomada de decisão, devem ser relativamente homogéneas. Uma vez que toda técnica é baseada na comparação de cada DMU com todos os restantes, um conjunto relativamente grande de unidades está recomendado para uma avaliação significativa. Nós suporemos que cada DMU produz N outputs por meio M inputs. Em DEA, a eficiência,  $h_j$ , de uma unidade de tomada de decisão específica, DMU<sub>j</sub>, é definida como a razão entre uma soma pesada de seus N outputs  $Y_{nj}$  e uma soma pesada de seus M inputs  $X_{mj}$ , uma extensão natural do conceito de eficiência usado nos campos da física e da engenharia [Charnes e outros 1978]:

$$h_j = \frac{\sum_{n=1}^N v_{nj} y_{nj}}{\sum_{m=1}^M \mu_{mj} x_{mj}}$$

Avalia-se, assim, um conjunto de J unidades, onde  $X_{mj}$  é o input m do DMU<sub>j</sub> e  $Y_{nj}$  é o output n do DMU<sub>j</sub>.

A cada uma das parcelas do numerador (contribuição de cada *Output*, depois de ponderado) é usual chamar-se *Output* virtual. Do mesmo modo, designam-se as parcelas do denominador por *Inputs* virtuais, pelo que esta medida de eficiência consiste no quociente do somatório dos *Outputs* virtuais pelo somatório dos *Inputs* virtuais.

Esta definição parece algo redutora e baseada em aspectos muito discutíveis, nomeadamente o da escolha dos pesos, e de facto assim seria se se ficasse por aqui. A ideia chave do método DEA reside em cada Unidade Organizacional ser livre na escolha dos seus próprios pesos, (no sentido de maximizar a sua eficiência) apenas com a restrição de nenhuma Unidade Organizacional (ela própria inclusive), apresentar eficiências superiores à unidade.

A ideia anteriormente exposta traduz-se pelo seguinte problema de programação fraccionária linear, que é resolvido para cada DMU:

$$\begin{aligned} \text{Max } h_{j'} &= \frac{\sum_{n=1}^N v_{nj'} y_{nj'}}{\sum_{m=1}^M \mu_{mj'} x_{mj'}} \\ \text{s.t. } h_j &= \frac{\sum_{n=1}^N v_{nj} y_{nj}}{\sum_{m=1}^M \mu_{mj} x_{mj}} \leq 1 \quad j=1\dots J \\ \mu_{mj'} &> 0 \quad m=1\dots M \\ v_{nj'} &> 0 \quad n=1\dots N \end{aligned}$$

( $\varepsilon$  é uma pequena quantidade não Arquimediana, normalmente usa-se  $\varepsilon=10^{-6}$ ).

Embora Charnes Cooper e Rhodes tenham resolvido este problema pelo método de Charnes & Cooper [Charnes e Cooper, 1962] que transforma o problema fraccionário num de programação linear através de mudanças de variáveis e introdução de restrições extra, a via que se seguirá conduz ao mesmo resultado de um modo mais intuitivo.

Para tal bastará reparar que para maximizar esta função fraccionária basta maximizar o numerador e manter o denominador constante. Na prática é usual forçar o denominador a valer 100% ou 1.

Deste modo obtém-se o seguinte programa linear:

$$\begin{aligned} \text{Max } h_{j'} &= \sum_{n=1}^N v_{nj'} y_{nj'} \\ \text{s.t. } \sum_{m=1}^M \mu_{mj'} x_{mj'} &= 1 \\ \sum_{n=1}^N v_{nj} y_{nj} &\leq \sum_{m=1}^M \mu_{mj} x_{mj} \quad j=1\dots J \\ \mu_{mj'} &\geq \varepsilon > 0 \quad m=1\dots M \\ v_{nj'} &\geq \varepsilon > 0 \quad n=1\dots N \end{aligned}$$

Este foi o primeiro modelo de DEA, baseia-se em minimização de inputs e assume economias com rendimentos constantes à escala.

O modelo que se vai apresentar na secção seguinte é não orientado e tem rendimentos variáveis à escala.

### 3-Um modelo com múltiplas constituências

Na fase de modelação há sempre que escolher quais as variáveis a considerar e de entre estas quais são as desejáveis e que são portanto produzidas, os *Outputs* e quais as consumidas ou *Inputs*. Por vezes, o que é desejável para um dado grupo de utilizadores é claramente indesejável para outro grupo (na literatura da especialidade usa-se o termo *constituency*, que será traduzido como constituência).

Exemplos de diferentes constituências são por exemplo condutores de automóveis *versus* ambientalistas, empreiteiros de obras públicas *versus* contribuintes e mais exemplos se poderiam arranjar. Uma das primeiras aplicações deste conceito, embora sem o formalizar claramente, foi a medida de *performance* das Universidades Inglesas consoante os interessados: pais, professores, alunos. Os autores desse estudo desenvolveram vários modelos em que a escolha das variáveis como Inputs ou Outputs iam alternando [Sarrico e outros 1997].

Faz pois sentido introduzir a seguinte definição:

Definição 1-Uma constituência é um vector m dimensional  $C^1 = [s(1)...s(i)...s(m)]$  composto de 1s e -1s. A presença de um '1' na posição i significa que essa constituência considera o atributo i desejável; pelo contrário, um '-1' indicaria que essa constituência o consideraria indesejável.

Quando nos referirmos a uma qualquer constituência, supondo que as variáveis estão fixamente ordenadas (por ordem alfabética por exemplo), iremos usar a seguinte terminologia: Constituência  $[s(1)...s(i)...s(m)]$  será representada por  $C_k$  em que k é dado por:

$$K = \sum_{i=1}^m [s(i) + |s(i)|] / 2 \times 2^{(m-i)}$$

Esta fórmula apenas representa o valor decimal do número binário obtido, substituindo o "-1" por zero e o "+1" por 1. Deste modo para m variáveis teremos  $2^m$  constituências de  $C_0$  até  $C(2^m-1)$ .

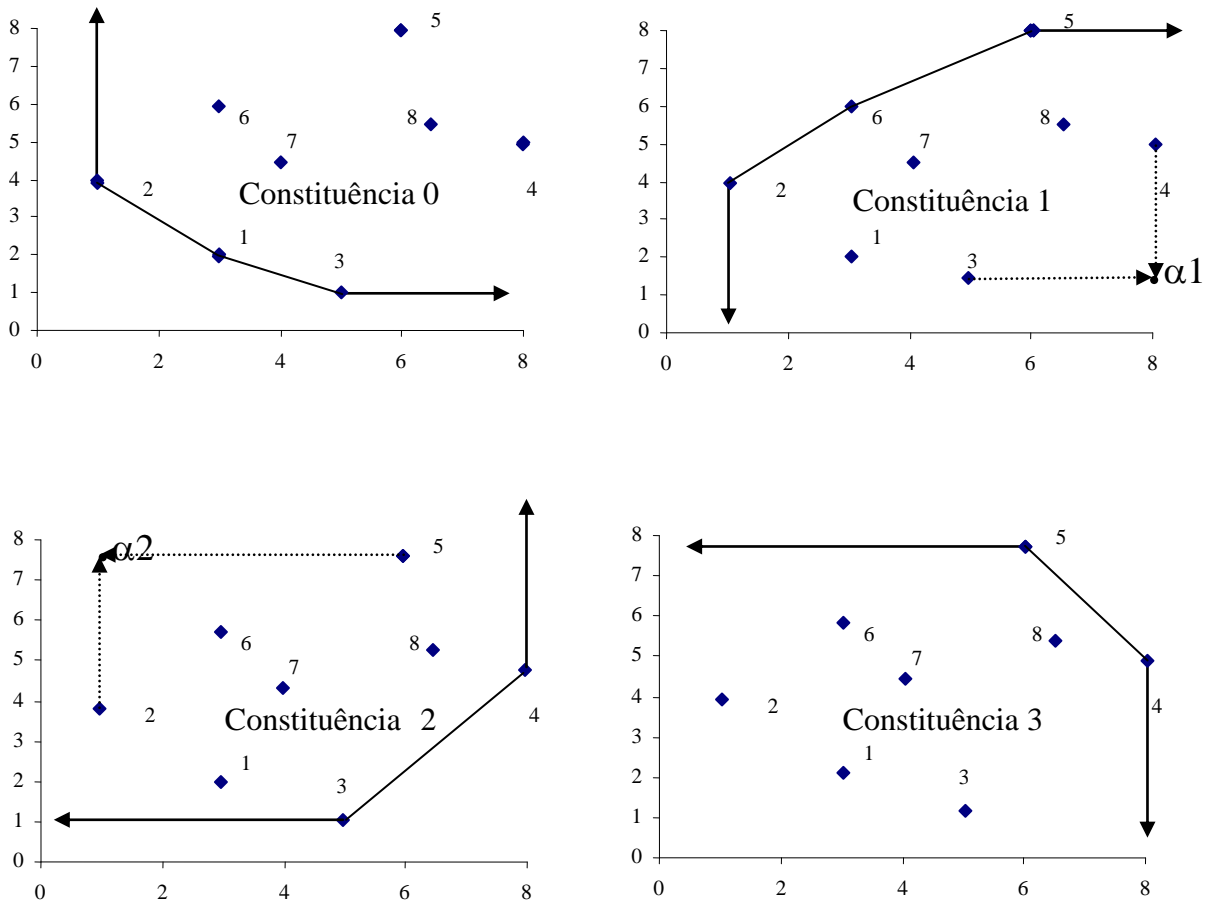
Vai-se ilustrar este conceito com um exemplo criado por Bougnol (Bougnol 2001) acerca de 8 carros a serem vendidos em 4 mercados com preferências bem distintas:

**Tabela -1 Dados para o exemplo**

Modelo	Atributo1	Atributo 2
1	3	2
2	1	4
3	5	1
4	8	5
5	6	8
6	3	6
7	4	4.5
8	6.5	5.5

A Figura 1 ilustra as fronteiras de eficiência para um caso com 8 DMUs, 2 atributos e  $2^2=4$  constituências, cujos valores se encontram na Tabela 1.

As fronteiras de eficiência para os casos das constituências 0 (-1;-1) e 3 (1;1) são já familiares, correspondendo aos modelos: “2\_Input 1\_Output\_ maximização CCR” e ao “2 Output 1\_Input\_ minimização CCR” respectivamente.



**Figura 1: Fronteiras de eficiência para um caso com 8 DMUs, 2 atributos e 4 constituências**

A Figura 1 ilustra as fronteiras de eficiência para um caso com 8 DMUs, 2 atributos e 4 constituências, cujos valores se encontram na Tabela 1. As fronteiras de eficiência para os casos das constituências 0 (-1;-1) e 3 (1;1) são já familiares, correspondendo aos modelos: “2\_Input 1\_Output\_ maximização CCR” e ao “2 Output 1\_Input\_ minimização CCR” respectivamente.

A formulação de Bougnol recorre a um ponto auxiliar  $\alpha_i^l$  para cada constituição definido originalmente pela seguinte equação.

Em que  $\mathcal{S}_i^l$  representa o sentido da preferência na constituição  $l$  para a variável  $i$  e  $a_i^j$  é o valor do atributo  $i$  no DMU  $j$ . Estes pontos auxiliares estão representados na figura 6.1 apenas para as constituências 1 e 2 para maior clareza. O modelo primal de Bougnol é o seguinte (quando o DMU  $j^*$  está a ser avaliado sob a constituição  $l$ ):

$$\begin{aligned} \text{Min } \omega(1) &= \langle a^{j^*}, \pi \rangle + \beta \\ \text{s.t. } \langle a^j, \pi \rangle + \beta &\geq 0 \quad \forall j \neq j^* \\ \langle \alpha^l - a^{j^*}, \pi \rangle &= 1 \\ \delta^l, \pi &\leq 0 \end{aligned}$$

$\beta$  livre

#### 4-Um modelo misto binário linear

O nosso modelo introduz variáveis binárias  $B_i$  e um Big M:  $M$ , e substitui  $\alpha_i^l$  por duas quantidades.

Por motivos computacionais há vantagem em decompor  $\pi$  nas suas componentes positiva e negativa obtendo-se:  $\pi_i = \pi_i^+ - \pi_i^-$  com  $0 = \pi_i^+ \pi_i^-$ . Deste modo, o novo modelo misto binário linear tem todas as variáveis positivas excepto, no que respeita a  $\beta$  que mantém o mesmo significado que no modelo primal de Bognol. Vindo:

$$\begin{aligned} \text{Min } \omega(1) &= \langle +a^j, \pi^+ \rangle + \langle (-a^j), \pi^- \rangle + \beta \\ \text{s.t. } \pi_i^+ - M B_i &\leq 0 \\ \pi_i^- - M(1 - B_i) &\leq 0 \\ \langle +a^j, \pi^+ \rangle + \langle (-a^j), \pi^- \rangle + \beta &\geq 0 \quad \forall j \neq j^* \\ \langle \alpha^{1+} - a^{j^*}, \pi^+ \rangle + \langle \alpha^{1-} - (-a^{j^*}), \pi^- \rangle &= 1 \\ \pi^+, \pi^- &\geq 0 \end{aligned}$$

$\beta$  Livre, B Binário

As duas primeiras restrições asseguram que se o atributo  $j$  é considerado desejável ele não pode ser considerado indesejável simultaneamente e *vice-versa*. A última restrição é semelhante à última do modelo original, especificamente o produto interno com  $\pi^+$ . De facto se  $\pi_i$  é positivo significa que  $\pi_i^-$  é nulo e  $\pi_i^+ = \pi_i$  vem que  $\delta_i^1 = -1$ .

Na Tabela 2 apresenta-se os resultados para o modelo das 4 constituências em que se pretende ilustrar que agora o cálculo é feito em relação à envolvente convexa do conjunto dos 8 pontos.

**Tabela 2: Resultados para os 8 DMUs**

Model	$\pi_{1+}$	$\pi_{2+}$	$\pi_{1-}$	$\pi_{2-}$	$\beta$	<b>Ef.</b>
1	0,08	0,10	0,00	0,00	-0,49	<b>-0,05</b>
2	0,14	0,00	0,00	0,00	-0,43	<b>-0,29</b>
3	0,00	0,11	0,06	0,00	-0,02	<b>-0,23</b>
4	0,00	0,00	0,14	0,00	0,93	<b>-0,21</b>
5	0,00	0,00	0,02	0,13	0,83	<b>-0,31</b>
6	0,09	0,00	0,00	0,11	0,36	<b>-0,04</b>
7	0,13	0,00	0,00	0,13	0,40	<b>0,33</b>
8	0,00	0,00	0,12	0,08	1,33	<b>0,14</b>

Da Tabela 2 pode-se concluir que a equação do hiperplano de suporte avaliando o DMU1 tem por equação  $0.08a_1 + 0.1a_2 = 0.49$ .

Já para o caso do DMU2 a equação seria  $0.14 a_1 = 0.43$ , isto é um hiperplano vertical que suporta a faceta 1-6. Este DMU é eficiente para 2 diferentes constituências.

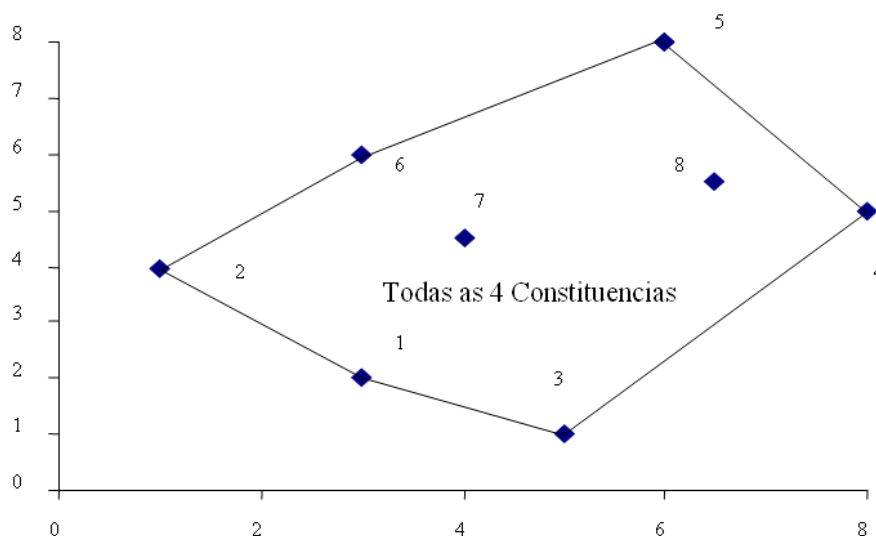


Figura 2: Exemplo para 4 constituências e oito DMUs

### 5-Tempo de processamento

Com esta nova formulação consegue-se reduzir os tempos de processamento de 9 horas para 16 minutos em máquinas equivalentes para a questão de qual a constituição que atribuí a melhor avaliação a um dado DMU.

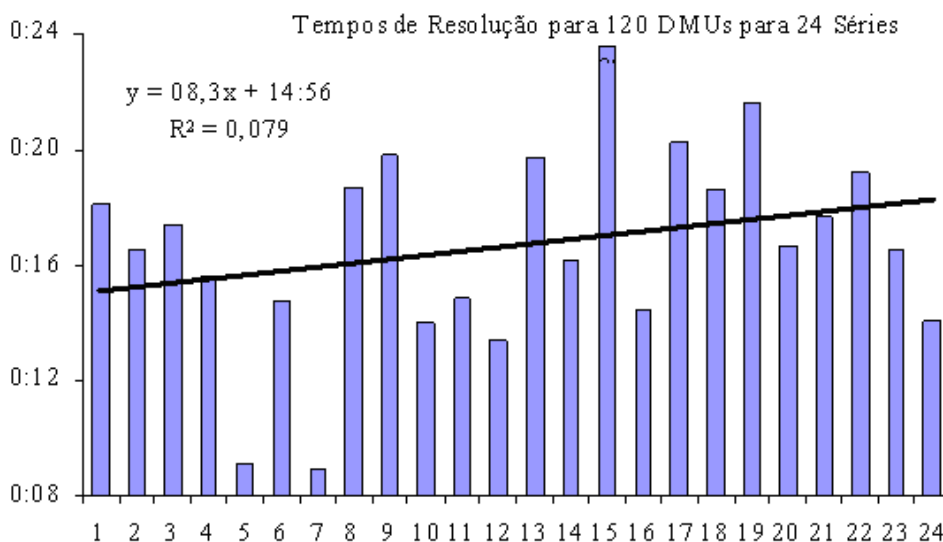
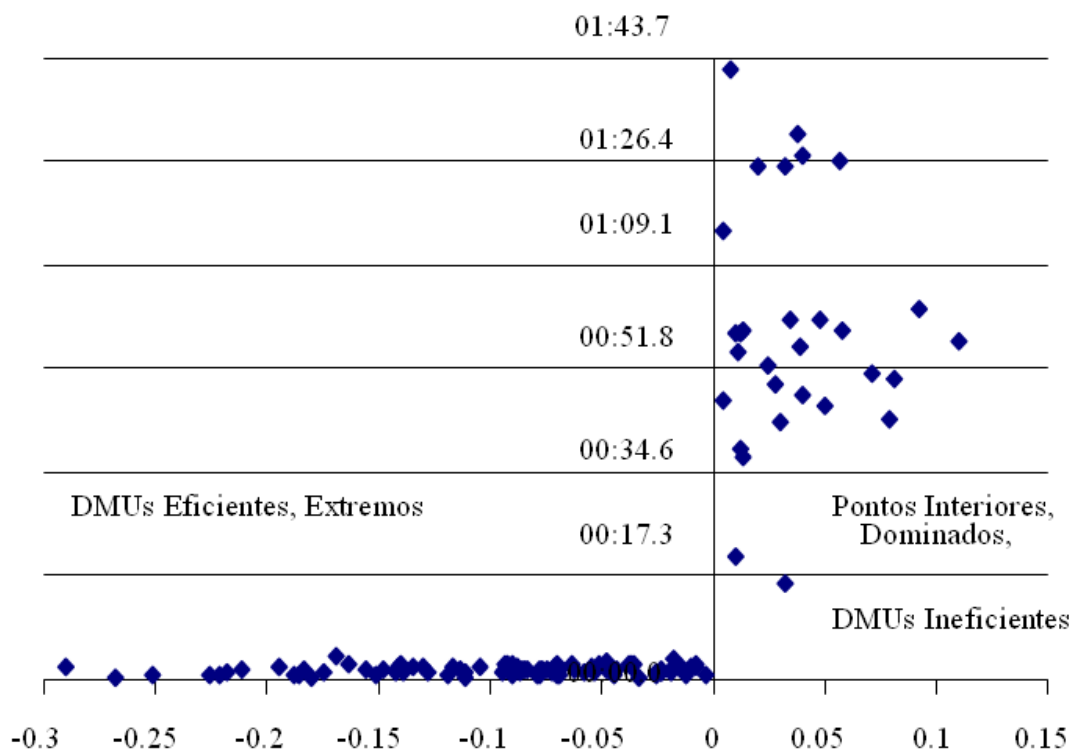


Figura 3: Tempos de processamento

Em ambos os casos, os computadores utilizados foram os Pentium III Fujitsu Siemens Scaleo a 512 799.97 Dupla Precisão kilowhets por segundo. No que respeita aos dados usaram-se dados com uma distribuição normal multi-variada em vez das clássicas funções de Cobb-

Douglas, dada a simetria do problema, (isto é: não há claramente nem Inputs nem outputs, mas apenas atributos). Para a geração dos dados usou-se o “Distribution View” pois este pode ser executado em qualquer ambiente que permita a criação de objectos COM (Coelho, 2005).

Na Figura 3, apresentam-se os resultados e repare-se que mesmo para o pior caso (que demorou 23 minutos e 32 segundos) obtém-se uma redução global de 22 para 1 com a nova formulação. Na Figura 4 ilustra-se o facto de os vértices consumirem muito menos tempo de cálculo que os pontos interiores, pelo que um pré-processamento dos dados poderia ser bastante vantajoso.



**Figura 4: Tempos de resolução para 120 DMUs com uma distribuição Normal em 7 dimensões.**

## 6-Conclusões

A nova formulação provou ser mais rápida que a anterior, tem contudo o inconveniente de não dar mais informação senão a de qual a constituição que melhor avalia o DMU em causa e qual a classificação de todos os outros DMUs com esse conjunto de multiplicadores assim obtido.

Tem a grande vantagem de já ter resolvido problemas ainda maiores (220 unidades por 9 variáveis). Recordar-se que ao utilizar o Matlab este apresenta dificuldades para além das 6 variáveis ao calcular a envolvente convexa do conjunto de dados. Se se desistir de analisar os DMUs ineficientes (pontos interiores da envolvente convexa do conjunto de dados) o cálculo seria ainda mais rápido.



Finalmente, falta referir que utilizámos o *Solver* do Excel que corresponde à opção mais fraca da *Frontline Systems*. Com o *Premium Solver* os resultados seriam ainda mais rápidos e precisos.

## **Bibliografia**

Bougnol, Marie-Laure, (2001) "Nonparametric Frontier Analysis with Multiple Constituencies", Ph.D. Dissertation, University of Mississippi, University, MS 38677.

Charnes, A., Cooper, W. W., (1962), "Programming with linear fractional functionals", *Naval Research Logistics Quarterly* 9 pp.181-185.

Charnes, A., Cooper, W. W., e Rhodes, E., (1978), "Measuring the efficiency of decision making units", *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, No. 6, pp. 429-444. (The "CCR" Model)

Charnes, A., Cooper, W. W., e Rhodes, E., (1979), "Short communication: measuring the efficiency of decision making units", *European Journal of Operational Research*, Vol. 3, No. 4, pp. 339.

Coelho, J. (2005), "Distribution View", <http://jcoelho.m6.net/edicao3.asp?pa=3515>.

Dulá, J.H. and B.L. Hickman, (1997). "Effects of excluding the column being scored from the DEA envelopment LP technology matrix", *Journal of the Operational Research Society* 48, 1001–1012.

Farrell, M. J., (1957), "The measurement of Productive Efficiency", *Journal of Royal Statistical Society A*, 120, pp. 253-281.